[JAROS 2017]　（2017.11.25-26, 金沢）

ランダム環境の下でのプロジェクトの価値評価法

名古屋市立大学名誉教授

宮原　孝夫 *

2017 年 11 月 26 日

目 次

*E-mail: yoshio_m@zm.commufa.jp

1　はじめに

• 不確実性のあるプロジェクトの価値評価の問題を考える。

• その際には、プロジェクトから生じるキャッシュフローのモデル設定とその評価法の指定とが必要である。

• プロジェクトの収益をランダムなキャッシュフロー

$$\mathbf{C} = \{C_0, C_1, \cdots, C_T\} \tag{1.1}$$

とし、そのランダム現在価値

$$RPV(\mathbf{C}) = \sum_{t=0}^{T} \tilde{C}_t, \quad \tilde{C}_t = \frac{C_t}{(1+r)^t} \tag{1.2}$$

の価値評価をする。

• 評価尺度としてはリスク鋭感的価値尺度（RSVM）を採用する。

$$U^{(\alpha)}(RPV(\mathbf{C})) \;\; = \;\; -\frac{1}{\alpha}\log E\left[e^{-\alpha RPV(\mathbf{C})}\right] \tag{1.3}$$

• この評価のためには、$RPV(\mathbf{C})$ の分布が求まれば良いことに注目しておこう。

• プロジェクトおよびプロジェクトから生じるキャッシュフロー列のモデルの構成法は多様である。（標準的なものとしては [3]、８章を参照せよ。）

• ここでは、プロジェクトの内的構造には立ち入らず、プロジェクトの収益がランダムな環境（景気）に強く影響されているような場合の価値評価法について議論する。

• さらに、プロジェクトに戦略を導入したときのキャッシュフロー列 $\mathbf{C}^{(\Phi)} = \{C_0, C_1^{(\Phi)}, \cdots, C_T^{(\Phi)}\}$ とプロジェクトの価値評価

$$U^{(\alpha)}(RPV(\mathbf{C}^{(\Phi)})) \tag{1.4}$$

$$\overline{V} = \sup_{\Phi} U^{(\alpha)}(RPV(\mathbf{C}^{(\Phi)})) \tag{1.5}$$

についても議論する。

◎　リスク鋭感的価値尺度については [1], [3] を参照せよ。

2　プロジェクトの収益過程のモデル設定

2.1　対象プロジェクトの概要

- 収益が景気の動向により左右されるようなプロジェクトを考える。
- 景気の状態は不確実であり確率的に予測する。
- プロジェクトの各期の収益は正規分布に従うものとし、その平均、分散は景気の状態に依存している。
- 景気は K 個の段階に区分されているものとする。
- 景気のレベルが k の段階にあるときのプロジェクトの収益の分布は $N(\mu_k, \sigma_k^2),\ k = 1, \cdots, K$、とする。
- 以上のようなモデルを確率過程として構成する。

2.2　収益過程のモデル設定

- 景気の変動は次のようなマルコフ過程とする。

$$\{Y_t, t = 0, 1, \cdots, T\}:\ \text{マルコフ過程}\ on\ \mathbb{K} = \{1, 2, \cdots, K\} \tag{2.1}$$

$$\{p(k, j), k, j \in \mathbb{K}\}:\ \text{遷移確率、}p(k, j) = P(Y_t = j | Y_{t-1} = k) \tag{2.2}$$

- 収益過程は次のようになっているものとする、

$$\{W_t, t = 1, 2, \cdots, T\} : i.i.d., \quad W_t \sim N(0, 1) \tag{2.3}$$

$\{W_t, t = 1, 2, \cdots, T\}$ は $\{Y_t, t = 0, 1, \cdots, T\}$ と独立とする。

$$\mu(k) = \mu_k,\ k = 1, \cdots, K, \tag{2.4}$$

$$\sigma(k) = \sigma_k,\ k = 1, \cdots, K, \tag{2.5}$$

$$X_t = \mu(Y_t) + \sigma(Y_t) W_t,\ t = 1, 2, \cdots, T. \tag{2.6}$$

2.3　基本モデル

$$\text{基本モデル：}\quad C_t = X_t :\quad t = 1, \cdots, T. \tag{2.7}$$

$$C_0 = -I_0. \tag{2.8}$$

X_t の分布：

$$dist(X_t|Y_{t-1}=k)(x) = \sum_{j=1}^{K} p(k,j) g_j(x) \tag{2.9}$$

$$= \sum_{j=1}^{K} p(k,j) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} e^{-\frac{(x-\mu_j)^2}{2\sigma_j^2}}, \quad t=1,2,\cdots,T. \tag{2.10}$$

ランダム現在価値

$$RPV(\mathbf{C}) = \sum_{t=0}^{T} \tilde{C}_t, \quad \tilde{C}_t = \frac{C_t}{(1+r)^t} = \frac{X_t}{(1+r)^t} \tag{2.11}$$

2.4 戦略の導入

プロジェクトの推進過程では、プロジェクトの規模を戦略的に調整できるものとする。可能な規模のクラスを $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_d\}$ とし、戦略 Φ は

$$\Phi = (\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_T), \quad \phi_t : \mathbb{K} \to \Lambda, \quad t = 1, 2, \cdots, T, \tag{2.12}$$

とする。キャッシュフロー列 $\mathbf{C}^{(\Phi)} = \{C_0, C_1^{(\Phi)}, \cdots, C_T^{(\Phi)}\}$ は

$$C_t^{(\Phi)} = \phi_t(Y_{t-1}) X_t = \phi_t(Y_{t-1}) \left(\mu(Y_t) + \sigma(Y_t) W_t\right), \ t = 1, 2, \cdots, T. \tag{2.13}$$

で与えられるものとしよう。すなわち、$(t-1)$-期の環境（景気）状態を知って t-期のプロジェクトの規模を決定する。この時、ランダム現在価値は

$$RPV(\mathbf{C}^{(\Phi)}) = \sum_{t=1}^{T} \left\{ \frac{\phi_t X_t}{(1+r)^t} \right\} \tag{2.14}$$

3 リスク鋭感的価値尺度によるプロジェクトの評価

プロジェクトの価値をリスク鋭感的価値尺度で評価する。その前提としてリスク鋭感的価値尺度の概要を説明する。（詳しくは [3] ８章を参照せよ。）

3.1 リスク鋭感的価値尺度

Definition 1 (リスク鋭感的価値尺度（RSVM）) 次式で定まる凹マネタリ価値尺度

$$U^{(\alpha)}(X) = -\frac{1}{\alpha} \log E[e^{-\alpha X}], \quad \alpha > 0, \tag{3.1}$$

を（リスク回避度 α の）リスク鋭感的価値尺度（$RSVM$）と呼ぶ。

Remark 1　次の近似式が成り立つ。（α についての展開式。）

$$U^{(\alpha)}(X) = -\frac{1}{\alpha}\log E[e^{-\alpha X}] = E[X] - \frac{1}{2}\alpha V[X] + \cdots \tag{3.2}$$

特に、X がガウス型であるときには

$$U^{(\alpha)}(X) = -\frac{1}{\alpha}\log E[e^{-\alpha X}] = E[X] - \frac{1}{2}\alpha V[X] \tag{3.3}$$

が成立する。したがって、ガウス型の分布に対しては平均分散分析と一致していることになる。

3.2　リスク鋭感的価値尺度の動学化

• プロジェクトの推進過程では、柔軟性のある戦略を採用出来る。

• 戦略をモデルの中に取り入れて評価できるようにするためには、価値尺度を動学化することが必要になる。

• 戦略をモデルの中に取り入れた評価法を「リアルオプション・アプローチ」と呼ぶことにする。

・ $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_T\}$, $\phi_t : \mathcal{F}_t$-predictable、戦略過程。

・ $\mathbf{C}^{(\Phi)} = \{C_0^{(\Phi)}, C_1^{(\Phi)}, C_2^{(\Phi)}, \ldots, C_T^{(\Phi)}\}$, 対応するキャッシュフロー。

• このキャッシュフローのランダム現在価値は

$$RPV(\mathbf{C}^{(\Phi)}) = \sum_{t=0}^{T} \frac{C_t^{(\Phi)}}{(1+r)^t} = \sum_{t=01}^{T} \tilde{C}_t^{(\Phi)}. \tag{3.4}$$

• 最適戦略のもとでのプロジェクトの評価値は

$$\overline{V}^{(\alpha)} = \sup_{\Phi} U^{(\alpha)}(RPV(\mathbf{C}^{(\Phi)})) \tag{3.5}$$

となる。

• この値 $\overline{V}^{(\alpha)}$ がリアルオプション・アプローチによるプロジェクトのリスク鋭感的価値尺度で測った価値である。

[採否の判断]

$$\overline{V}^{(\alpha)} \geqq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{採用可。}$$

$$\overline{V}^{(\alpha)} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{不採用。}$$

• こうして我々は、確率的最適制御の問題に到達したことになる。

• この最適化問題はうまく解けるだろうか？

[動学的価値尺度と時間的整合性]

• 価値尺度を動学化する。

Definition 2 (動学的価値尺度（Dynamic Value Measure）)　各 t, $t=0,1,2,\cdots,T$, に対して凹マネタリ価値尺度 $v_t(\cdot): L(\mathcal{F}_T) \to L(\mathcal{F}_t)$ が与えられているとき、これを動学的凹マネタリ価値尺度と呼ぶ。

Definition 3 (時間的整合性（time-consistency）) 動学的凹マネタリ価値尺度 $\{v_t(X), t=0,1,2,\cdots,T\}$ が次の条件

$$v_t(X) = v_t(v_{t+1}(X)), t=0,1,2,\cdots,T-1, \tag{3.6}$$

を満たしているとき、時間的整合性を持つと言う。

Remark 2　動学的価値尺度を連続時間の形で設定することも可能である。

[動学的リスク鋭感的価値尺度]

- リスク鋭感的価値尺度 $U^{(\alpha)}(X)$ は、次のように表現できる。

$$\begin{aligned} U^{(\alpha)}(X) &= -\frac{1}{\alpha}\log E\left[e^{-\alpha X}\right] = -\frac{1}{\alpha}\log E\left[E\left[e^{-\alpha X}\middle|\mathcal{F}_1\right]\right] \\ &= -\frac{1}{\alpha}\log E\left[e^{\log E\left[e^{-\alpha X}\middle|\mathcal{F}_1\right]}\right] = -\frac{1}{\alpha}\log E\left[e^{-\alpha\left(-\frac{1}{\alpha}\log E\left[e^{-\alpha X}\middle|\mathcal{F}_1\right]\right)}\right] \end{aligned} \tag{3.7}$$

この式をヒントに、次のように定義する。

Definition 4 [動学的リスク鋭感的価値尺度 **(DRSVM)**]

$$U_t^{(\alpha)}(X) = -\frac{1}{\alpha}\log E[e^{-\alpha X}|\mathcal{F}_t], \quad t=0,1,\cdots,T. \tag{3.8}$$

Proposition 1 上で定義された [動学的リスク鋭感的価値尺度] は時間的整合性を持つ。

- 動学的リスク鋭感的価値尺度の重要性を示す次のような結果が得られている。

Proposition 2 効用無差別価値として定まる動学的凹マネタリ価値尺度の中で時間的整合性を持つものは、ほぼ上の [動学的リスク鋭感的価値尺度] に限られる。

3.3　キャッシュフローの評価法

- $\{U_t^{(\alpha)}(X), t=0,1,2,\cdots,T\}$ が時間的整合性を持つことより、次の公式が成立する。

$$\begin{aligned} U_0^{(\alpha)}(RPV(\mathbf{C})) &= U_0^{(\alpha)}\left(\sum_{s=1}^{T}\tilde{C}_s\right) = U_0^{(\alpha)}\left(U_1^{(\alpha)}\left(\sum_{s=1}^{T}\tilde{C}_s\right)\right) \\ &= U_0^{(\alpha)}\left(\tilde{C}_1 + U_1^{(\alpha)}\left(\sum_{s=2}^{T}\tilde{C}_s\right)\right) \end{aligned} \tag{3.9}$$

• 同様にして次式を得る。

$$
\begin{aligned}
U_t^{(\alpha)}\left(\sum_{s=t+1}^{T}\tilde{C}_s\right) &= U_t^{(\alpha)}\left(U_{t+1}^{(\alpha)}\left(\sum_{s=t+1}^{T}\tilde{C}_s\right)\right) \\
&= U_t^{(\alpha)}\left(\tilde{C}_{t+1}+U_{t+1}^{(\alpha)}\left(\sum_{s=t+2}^{T}\tilde{C}_s\right)\right) \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

• ここで $V_t^{(\alpha)}=\tilde{C}_t+U_t^{(\alpha)}\left(\sum_{s=t+1}^{T}\tilde{C}_s\right)$ と置くと、上の関係式より

$$
\begin{aligned}
V_T^{(\alpha)} &= \tilde{C}_T, \qquad (3.11)\\
V_t^{(\alpha)} &= \tilde{C}_t+U_t^{(\alpha)}\left(\tilde{C}_{t+1}+U_{t+1}^{(\alpha)}\left(\sum_{s=t+2}^{T}\tilde{C}_s\right)\right)=\tilde{C}_t+U_t^{(\alpha)}\left(V_{t+1}^{(\alpha)}\right),\\
&\qquad t=T-1,T-2,\cdots,1,0. \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

を得る。この関係式から再帰的に

$$
\{V_t^{(\alpha)},\quad t=T-1,T-2,\cdots,0\} \qquad (3.13)
$$

を求めることができ、最終的に

$$
V_0^{(\alpha)}=\tilde{C}_0+U_0^{(\alpha)}\left(\sum_{s=1}^{T}\tilde{C}_s\right)=U_0^{(\alpha)}\left(\sum_{s=0}^{T}\tilde{C}_s\right)=V^{(\alpha)}(\mathbf{C}) \qquad (3.14)
$$

が求まる。

3.4 戦略付きキャッシュフローの評価法

• 戦略 $\Phi=\{\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_T\}$ を導入した場合、時間整合性と単調性を使い次のような結果が得られる。

$$
\begin{aligned}
\overline{V}^{(\alpha)} &= \sup_{\Phi}\left\{U^{(\alpha)}\left(RPV(\mathbf{C}^{(\Phi)})\right)\right\}=\sup_{\Phi}\left\{\tilde{C}_0^{(\Phi)}+U_0^{(\alpha)}\left(\sum_{t=1}^{T}\tilde{C}_t^{(\Phi)}\right)\right\}\\
&= \sup_{\Phi}\left\{\tilde{C}_0^{(\Phi)}+U_0^{(\alpha)}\left(U_1^{(\alpha)}\left(\sum_{t=1}^{T}\tilde{C}_t^{(\Phi)}\right)\right)\right\}\\
&= \cdots\\
&= \sup_{\phi_1}\left\{\tilde{C}_0^{(\Phi)}+U_0^{(\alpha)}\left(\tilde{C}_1^{(\Phi)}+\sup_{\phi_2}\left\{U_1^{(\alpha)}\left(\tilde{C}_2^{(\Phi)}+\sup_{\phi_3}\{\cdots\right.\right.\right.\right.\right.\\
&\qquad \left.\left.\left.\left.\left.\cdots+\sup_{\phi_{T-1}}\left\{U_{T-2}^{(\alpha)}\left(\tilde{C}_{T-1}^{(\Phi)}+\sup_{\phi_T}\left\{U_{T-1}^{(\alpha)}\left(\tilde{C}_T^{(\Phi)}\right)\right\}\right)\right\}\cdots\right\}\right)\right\}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

$$(3.15)$$

4 基本モデルの評価

簡単のため、$r=0$ としておく。この時ランダム現在価値は

$$RPV(\mathbf{C}) = \sum_{t=0}^{T} \tilde{C}_t, = \sum_{t=0}^{T} C_t = \sum_{t=0}^{T} X_t, \tag{4.1}$$

となる。従って、

$$\begin{aligned} U^{(\alpha)}(RPV(\mathbf{C})) &= -\frac{1}{\alpha}\log E\left[e^{-\alpha RPV(\mathbf{C})}\right] \\ &= -\frac{1}{\alpha}\log E\left[e^{-\alpha\sum_{t=0}^{T} X_t}\right] && (4.2) \\ & && (4.3) \end{aligned}$$

$$X_t = \mu(Y_t) + \sigma(Y_t)W_t,\ t = 1, 2, \cdots, T. \tag{4.4}$$

となる。フィルトレーション $\{\mathcal{F}_t, t = 0, 1, \cdots, T\}$ を $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s, Y_s, s \leqq t\}$ により定める。§4.3 の結論より

$$\begin{aligned} V_T^{(\alpha)} &= X_T, && (4.5) \\ V_t^{(\alpha)} &= X_t + U_t^{(\alpha)}\left(V_{t+1}^{(\alpha)}\right),\ t = T-1, T-2, \cdots, 1, 0 && (4.6) \end{aligned}$$

は、次のように計算される。

$$V_T^{(\alpha)}(x,k) = V_T^{(\alpha)}|_{(X_T=x, Y_T=k)} = x \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} V_{T-1}^{(\alpha)}(x,k) &= x + U_{T-1}^{(\alpha)}(V_T^{(\alpha)})|_{(X_{T-1}=x, Y_{T-1}=k)} \\ &= x - \frac{1}{\alpha}\log E\left[e^{-\alpha X_T}|\mathcal{F}_{T-1}\right](x,k) \\ &= x - \frac{1}{\alpha}\log E\left[e^{-\alpha(\mu(Y_T)+\sigma(Y_T)W_T)}|\mathcal{F}_{T-1}\right](x,k) \\ &= x - \frac{1}{\alpha}\log E\left[\sum_{j=1}^{K} p(k,j)e^{-\alpha(\mu_j+\sigma_j W_T)}\right] \\ &= x - \frac{1}{\alpha}\log\left(\sum_{j=1}^{K} p(k,j)E\left[e^{-\alpha(\mu_j+\sigma_j W_T)}\right]\right) \\ &= x - \frac{1}{\alpha}\log\left(\sum_{j=1}^{K} p(k,j)e^{-\alpha\mu_j+\frac{1}{2}\alpha^2\sigma_j^2}\right) && (4.8) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \theta^{(\alpha)}(k) &:= e^{-\alpha\mu_k+\frac{1}{2}\alpha^2\sigma_k^2}, \quad k = 1, 2, \cdots, K. && (4.9) \\ b_1^{(\alpha)}(k) &:= \sum_{j=1}^{K} p(k,j)\theta^{(\alpha)}(j), \quad k = 1, 2, \cdots, K. && (4.10) \end{aligned}$$

と置いて

$$V_{T-1}^{(\alpha)}(x,k) \quad = \quad x - \frac{1}{\alpha}\log\left(b_1^{(\alpha)}(k)\right) \tag{4.11}$$

となる。

後のために

$$P = \Bigg(p(k,j)\Bigg),\ b_1^{(\alpha)} = \Bigg(b_1^{(\alpha)}(j)\Bigg). \tag{4.12}$$

と置く。

$$\begin{aligned} & V_{T-2}^{(\alpha)}(x,k) = x + U_{T-2}^{(\alpha)}(V_{T-1}^{(\alpha)})|_{(X_{T-2}=x, Y_{T-2}=k)} \\ = \quad & x - \frac{1}{\alpha}\log E\left[e^{-\alpha V_{T-1}^{(\alpha)}}|\mathcal{F}_{T-2}\right](x,k) \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned} & E\left[e^{-\alpha V_{T-1}^{(\alpha)}}|\mathcal{F}_{T-2}\right](x,k) \\ = \quad & E\left[e^{-\alpha\left(X_{T-1}-\frac{1}{\alpha}\log\left(b_1^{(\alpha)}(Y_{T-1})\right)\right)}|\mathcal{F}_{T-2}\right](x,k) \\ = \quad & E\left[\left(e^{-\alpha(\mu(Y_{T-1})+\sigma(Y_{T-1})W_{T-1})}\right)b_1^{(\alpha)}(Y_{T-1})|\mathcal{F}_{T-2}\right](x,k) \\ = \quad & E\left[E\left[\left(e^{-\alpha(\mu(Y_{T-1})+\sigma(Y_{T-1})W_{T-1})}\right)b_1^{(\alpha)}(Y_{T-1})|\mathcal{F}_{T-2},Y_{T-1}\right]|\mathcal{F}_{T-2}\right](x,k) \\ = \quad & E\left[E\left[\left(e^{-\alpha(\mu(Y_{T-1})+\sigma(Y_{T-1})W_{T-1})}\right)|\mathcal{F}_{T-2},Y_{T-1}\right]b_1^{(\alpha)}(Y_{T-1})|\mathcal{F}_{T-2}\right](x,k) \\ = \quad & E\left[\left(e^{-\alpha\mu(Y_{T-1})+\frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2(Y_{T-1})}\right)b_1^{(\alpha)}(Y_{T-1})|\mathcal{F}_{T-2}\right](x,k) \\ = \quad & \sum_{j=1}^{K} p(k,j)\left(e^{-\alpha\mu_j+\frac{1}{2}\alpha^2\sigma_j^2}\right)b_1^{(\alpha)}(j) \\ = \quad & \sum_{j=1}^{K} p(k,j)\theta^{(\alpha)}(j)b_1^{(\alpha)}(j) \end{aligned} \tag{4.14}$$

ここで、

$$\theta_2^{(\alpha)}(j) = \theta^{(\alpha)}(j)b_1^{(\alpha)}(j), \qquad \theta_2^{(\alpha)} = \Bigg(\theta_2^{(\alpha)}(j))\Bigg). \qquad b_2^{(\alpha)} = P\theta_2^{(\alpha)}. \tag{4.15}$$

と置くと

$$\begin{aligned} & V_{T-2}^{(\alpha)}(x,k) = x - \frac{1}{\alpha}\log E\left[e^{-\alpha V_{T-1}^{(\alpha)}}|\mathcal{F}_{T-2}\right](x,k) \\ = \quad & x - \frac{1}{\alpha}\log\left(b_2^{(\alpha)}(k)\right) \end{aligned} \tag{4.16}$$

となる。

これを繰り返して、$U^{(\alpha)}(RPV(\mathbf{C}))$ が求まる。

5　戦略を導入したモデル設定とその評価

5.1　最適戦略とプロジェクトの価値評価

プロジェクトの価値評価は

$$\overline{V}^{(\alpha)} = \sup_{\Phi} U^{(\alpha)}(RPV(\mathbf{C}^{(\Phi)})) \tag{5.1}$$

で計算され、最適戦略及びプロジェクトの評価値は §3.4 で述べた次式

$$\begin{aligned}\overline{V}^{(\alpha)} &= \sup_{\Phi}\left\{U^{(\alpha)}\left(RPV(\mathbf{C}^{(\Phi)}\right)\right\} = \sup_{\Phi}\left\{\tilde{C}_0^{(\Phi)} + U_0^{(\alpha)}\left(\sum_{t=1}^{T}\tilde{C}_t^{(\Phi)}\right)\right\} \\ &= \sup_{\phi_1}\left\{\tilde{C}_0^{(\Phi)} + U_0^{(\alpha)}\left(\tilde{C}_1^{(\Phi)} + \sup_{\phi_2}\left\{U_1^{(\alpha)}\left(\tilde{C}_2^{(\Phi)} + \sup_{\phi_3}\{\cdots\right.\right.\right.\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\left.\left.\left.\cdots + \sup_{\phi_{T-1}}\left\{U_{T-2}^{(\alpha)}\left(\tilde{C}_{T-1}^{(\Phi)} + \sup_{\phi_T}\left\{U_{T-1}^{(\alpha)}\left(\tilde{C}_T^{(\Phi)}\right)\right\}\right)\right\}\cdots\right\}\right)\right\}\right)\right\}\end{aligned} \tag{5.2}$$

を、我々の問題に即して、時間的に逆向きに解くことにより求まる。

$$\begin{aligned} & U_{T-1}^{(\alpha)}\left(\tilde{C}_T^{(\Phi)}\right)(x,k,\phi_T(k)=\lambda_l) \\ =\ & -\frac{1}{\alpha}\log E\left[e^{-\alpha\phi_T X_T}|\mathcal{F}_{T-1}\right](x,k,\lambda_l) \\ =\ & -\frac{1}{\alpha}\log E\left[e^{-\alpha\phi_T(Y_{T-1})(\mu(Y_T)+\sigma(Y_T)W_T)}|\mathcal{F}_{T-1}\right](x,k,\lambda_l) \\ =\ & -\frac{1}{\alpha}\log E\left[\sum_{j=1}^{K}p(k,j)e^{-\alpha\lambda_l(\mu_j+\sigma_j W_T)}\right] \\ =\ & -\frac{1}{\alpha}\log\left(\sum_{j=1}^{K}p(k,j)e^{-\alpha\lambda_l\mu_j+\frac{1}{2}\alpha^2\lambda_l^2\sigma_j^2}\right)\end{aligned} \tag{5.3}$$

ここで

$$\theta^{(\alpha)}(k,\lambda) := e^{-\alpha\lambda\mu_k+\frac{1}{2}\alpha^2\lambda^2\sigma_k^2}, \quad k=1,2,\cdots,K. \tag{5.4}$$

$$b_1^{(\alpha)}(k,\lambda) := \sum_{j=1}^{K}p(k,j)\theta^{(\alpha)}(j,\lambda) \tag{5.5}$$

と置くと、

$$U_{T-1}^{(\alpha)}\left(\tilde{C}_T^{(\Phi)}\right)(x,k,\phi_{T-1}(k)=\lambda_l) = -\frac{1}{\alpha}\log\left(b_1^{(\alpha)}(k,\lambda_l)\right) \tag{5.6}$$

となり、

$$
\begin{aligned}
\overline{V}_{T-1}^{(\alpha)}(x,k) &= x + \sup_l U_{T-1}^{(\alpha)}\left(\tilde{C}_T^{(\Phi)}\right)(x,k,\lambda_l) \\
&= x + \sup_l \left\{ -\frac{1}{\alpha}\log\left(b^{(\alpha)}(k,\lambda_l)\right)\right\} && (5.7) \\
&= x - \frac{1}{\alpha}\log\left(\inf_l \left\{ b_1^{(\alpha)}(k,\lambda_l)\right\}\right). && (5.8)
\end{aligned}
$$

である。

ここで

$$
\overline{b}_1^{(\alpha)}(k) := \inf_l \left\{ b_1^{(\alpha)}(k,\lambda_l)\right\} \tag{5.9}
$$

と置き、inf を与える λ_l を $\overline{\lambda}(k)$ とすると、最適戦略 $\overline{\phi}_T$ は

$$
\overline{\phi}_T(Y_{T-1}) = \overline{\lambda}(Y_{T-1}) \tag{5.10}
$$

$$
\overline{b}_1^{(\alpha)}(k) = \inf_l \left\{ b_1^{(\alpha)}(k,\lambda_l)\right\} = b_1^{(\alpha)}(k,\overline{\lambda}(k)) \tag{5.11}
$$

となっている。そして、最適戦略の下での $\overline{V}_{T-1}^{(\alpha)}(x,k)$ は

$$
\overline{V}_{T-1}^{(\alpha)}(x,k) = x - \frac{1}{\alpha}\log\left(\overline{b}_1^{(\alpha)}(k)\right) = x - \frac{1}{\alpha}\log\left(b_1^{(\alpha)}(k,\overline{\lambda}(k))\right) \tag{5.12}
$$

となっている。

次に、

$$
\overline{V}_{T-2}^{(\alpha)}(x,k) = x + \sup_l \left\{ U_{T-2}^{(\alpha)}\left(\overline{V}_{T-1}^{(\alpha)}\right)(x,k,\phi_{T-1}(k)=\lambda_l)\right\} \tag{5.13}
$$

を計算する。

$$
\begin{aligned}
&U_{T-2}^{(\alpha)}\left(\overline{V}_{T-1}^{(\alpha)}\right)(x, Y_{T-2}=k, \phi_{T-1}(k)=\lambda_l) \\
= \ &-\frac{1}{\alpha}\log\left(E\left[e^{-\alpha\left(\overline{V}_{T-1}^{(\alpha)}\right)}|\mathcal{F}_{T-2}\right](x,k)\right) && (5.14)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& E\left[e^{-\alpha\left(\overline{V}_{T-1}^{(\alpha)}\right)}|\mathcal{F}_{T-2}\right](x,k) \\
= \ & E\left[e^{-\alpha\left(\lambda_l(\mu(Y_{T-1})+\sigma(Y_{T-1})W_{T-1}) - \frac{1}{\alpha}\log \overline{b}_1^{(\alpha)}(Y_{T-1})\right)}|\mathcal{F}_{T-2}\right](x,k) \\
= \ & E\left[\left(e^{-\alpha\lambda_l(\mu(Y_{T-1})+\sigma(Y_{T-1})W_{T-1})}\right)\overline{b}_1^{(\alpha)}(Y_{T-1})|\mathcal{F}_{T-2}\right](x,k) \\
= \ & E\left[E\left[\left(e^{-\alpha\lambda_l(\mu(Y_{T-1})+\sigma(Y_{T-1})W_{T-1})}\right)\overline{b}_1^{(\alpha)}(Y_{T-1})|\mathcal{F}_{T-2},Y_{T-1}\right]|\mathcal{F}_{T-2}\right](x,k) \\
= \ & E\left[E\left[\left(e^{-\alpha\lambda_l(\mu(Y_{T-1})+\sigma(Y_{T-1})W_{T-1})}\right)|\mathcal{F}_{T-2},Y_{T-1}\right]\overline{b}_1^{(\alpha)}(Y_{T-1})|\mathcal{F}_{T-2}\right](x,k) \\
= \ & E\left[\left(e^{-\alpha\lambda_l\mu(Y_{T-1})+\frac{1}{2}\alpha^2\lambda_l^2\sigma^2(Y_{T-1})}\right)\overline{b}_1^{(\alpha)}(Y_{T-1}))|\mathcal{F}_{T-2}\right](x,k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{K} p(k,j)\left(e^{-\alpha\lambda_l\mu_j+\frac{1}{2}\alpha^2\lambda_l^2\sigma_j^2}\right)\overline{b}^{(\alpha)}(j) \\
&= \sum_{j=1}^{K} p(k,j)\theta^{(\alpha)}(j,\lambda_l)\overline{b}_1^{(\alpha)}(j) \qquad (5.15)
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\theta_2^{(\alpha)}(j,\lambda)=\theta^{(\alpha)}(j,\lambda)\overline{b}_1^{(\alpha)}(j,\lambda), \quad \theta_2^{(\alpha)}(\lambda)=\left(\theta_2^{(\alpha)}(j,\lambda)\right). \quad b_2^{(\alpha)}(\lambda)=P\theta_2^{(\alpha)}(\lambda). \qquad (5.16)
$$

$$
\overline{b}_2^{(\alpha)}(k):=\inf_l\left\{b_2^{(\alpha)}(k,\lambda_l)\right\} \qquad (5.17)
$$

と置くと、上の結果から

$$
\begin{aligned}
\overline{V}_{T-2}^{(\alpha)}(x,k) &= x+\sup_l\left\{U_{T-2}^{(\alpha)}\left(\overline{V}_{T-1}^{(\alpha)}\right)(x,k,\phi_{T-1}=\lambda_l)\right\} \\
&= x-\frac{1}{\alpha}\log\left(\overline{b}_2^{(\alpha)}(k)\right). \qquad (5.18)
\end{aligned}
$$

これを繰り返して、$\overline{V}^{(\alpha)}=\sup_\Phi U^{(\alpha)}(RPV(\mathbf{C}^{(\Phi)}))$ が求まる。

6 終わりに: まとめと今後の課題

ランダム環境下にあるプロジェクトの評価モデルを構築した。これを実用性のあるモデルにするためには種々の改良を加える必要があろう。今後の課題としたい。

参考文献

[1] Miyahara, Y. (2010): Risk-Sensitive Value Measure Method for Projects Evaluation, *Journal of Real Options and Strategy*, Vol.3, No.2, pp.185-204.

[2] Miyahara, Y. (2014): Evaluation of the Scale Risk, *RIMS Kokyuroku, No.1886, 'Financial Modeling and Analysis (2013/11/20–2013/11/22)*, pp. 181-188.

[3] 宮原孝夫 (2017):「［研究ノート］プロジェクトの総合的評価理論『リスク鋭感的価値尺度法』」、日本リアルオプション学会機関誌「リアルオプションと戦略」　第 9 巻　第 2 号（特別号）、研究叢書　第 1 号。