意思決定理論との整合性を考慮した記述的リスク尺度の提案

慶應義塾大学　小野崎純人 *　ONOZAKI Sumito
慶應義塾大学　今井潤一　IMAI Junichi

1.　はじめに

本研究では, 数理ファイナンスの中核であるリスク理論に記述的枠組みを与え, 記述的リスク尺度の一つとして Reference-dependent Expected Shortfall(以下RES) を提案する．プロスペクト理論等で知られている参照点 (Reference point) を明示的に含むことから, このリスク尺度を Reference-dependent Expected Shorfall と名付けた．既存のリスクの研究のほとんどは規範的な理論の下で議論されているが, それとは対照的に本研究ではプロスペクト理論のような記述的な意思決定理論に焦点を当て, 記述的理論との整合性を保つようなリスク尺度を目指す.

近年, リスク理論と意思決定理論は深く関連していることが明らかになってきている．関連性の一つとして有名なものには, リスクを無差別効用価格として定義するものがある．このようにリスクの望ましい性質を無差別効用価格の観点から説明したものには, 宮原 [3] などがある．宮原 [3] で提唱されたリスク鋭感的価値尺度法は, リスク回避的な投資家が持つ効用の一つとして知られる指数効用関数を想定したときに無差別効用価格として定義される．また, リスク理論と意思決定理論のもう一つの特徴的な関連は確率優越によるものである．確率優越は, 確率変数の順序関係であり, 特に二次確率優越は任意の凹関数の期待効用最大化と対応している．この確率優越は無差別効用価格を含む広い理論であり, 無差別効用価格では説明できない多くのリスク尺度を意思決定理論から説明することが可能になる．このような試みは Ogryczak[2] を中心として議論されてきた.

これらの議論では意思決定理論として凹関数の効用関数のみを扱っているが, 実際には人々がこのようには行動しないことが心理学の研究によって指摘されている．実際の人々の行動を表すモデルに関しては, 心理学や行動経済学で盛んに研究が行われており, その中でも行動ファイナンスで提唱されているプロスペクト理論は特に有名である．リスク理論に関しても, 実際には人々がファイナンスで扱われるリスク理論のようには感じないということが心理学者によって指摘されている.

そこで本研究では実際の人のリスクの感じ方を数理的なフレームワークとして与えるために, 確率優越とプロスペクト理論を用いて記述的リスク尺度 RES を定義する．さらに, RES がファイナンスのリスク尺度としての性質や, 心理学におけるリスク認知の多くの特徴を兼ね備えていることを示す.

2.　確率優越

確率優越は効用関数のクラスと同値な概念であり, リスク尺度と深い関係がある.

2.1.　確率優越の定義

確率変数 X, Y の分布関数をそれぞれ $F(x), G(x)$ とする．このとき２次分布関数は,

$$F^{(2)}(x) = \int_{-\infty}^{x} F(u)du,$$

と定義され, 任意の実数 x で $F^{(2)}(x) \leq G^{(2)}(x)$ が成立するとき, X は Y に２次確率優越するといい, 以下のように表す.

$$X \succeq_{SSD} Y.$$

また, プロスペクト確率優越の概念は Baucells[1] によって与えられている．プロスペクト理論の参照点を w とすると,

$$\int_{w}^{x} F(u)du \leq \int_{w}^{x} G(u)du \quad \forall x \geq w,$$
$$\int_{w}^{x} F(u)du \geq \int_{w}^{x} G(u)du \quad \forall x < w,$$

を満たすときに X は Y にプロスペクト確率優越するといい, 以下のように表す.

$$X \succeq_{PSD} Y.$$

2.2.　確率優越と意思決定理論

確率優越と意思決定理論に関しては以下のことが知られている．任意の単調増加の凹関数の効用関数に対して,

$$E[u(X)] \geq E[u(Y)],$$

が成り立つことと,

$$X \succeq_{SSD} Y,$$

*This research was supported by JSPS KAKENHI Grant Number YYKKB09.

は同値である．この性質から, X が Y に 2 次確率優越しているときには Y は X よりもハイリスクであると解釈されている．同様の定義をプロスペクト理論に当てはめると, 参照点を w とする任意の S 字型の価値関数に対して,

$$E[v(X)] \geq E[v(Y)],$$

が成り立つことと,

$$X \succeq_{PSD} Y,$$

は同値であるという帰結が得られる．ここで参照点を w とする S 字型価値関数 v とは, $x \geq w$ の範囲で $v(x)$ が凹関数であり, $x < w$ の範囲で $v(x)$ が凸関数である単調増加関数のことをいう．

2.3. 確率優越とリスク尺度

Expected Shortfall は,

$$ES_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha q(t)dt,$$

で定義される．ここで $q(t)$ は t クオンタイルである．このとき, 任意の α に対して,

$$ES_\alpha(X) \leq ES_\alpha(Y),$$

が成り立つことと,

$$X \succeq_{SSD} Y,$$

は同値である．

3. Reference-dependent Expected Shortfall

本研究で提案するリスク尺度である Reference-dependent Expected Shortfall を,

$$RES_{w,\beta_2,\beta_1}(X) = w - \frac{1}{\beta_2 - \beta_1}\int_{\beta_1}^{\beta_2} q(t)dt,$$

と定義する．ここで, w は参照点であり, リスクを計算するための主観的な基準点を表す．このような主観性は心理学の分野で広く受け入れられている．

4. リスク尺度の性質

記述的リスク尺度である RES に関しても, リスク尺度が満たしていると望ましいとされるいくつかの性質を満たすことが証明できる．

Theorem 1 確率変数 X, Y に対して,

$$X \succeq_{PSD} Y \Rightarrow RES_{w,\beta_2,\beta_1}(X) \leq RES_{w,\beta_2,\beta_1}(Y),$$

$\beta_1 \leq F(w), G(w) \leq \beta_2$ が成り立つ．また, $F(w) = G(w)$ のとき, 任意の β_1, $\beta 2$ に対して,

$$X \succeq_{PSD} Y \Leftrightarrow RES_{w,\beta_2,\beta_1}(X) \leq RES_{w,\beta_2,\beta_1}(Y),$$

が成り立つ．

Theorem 1 は ES と 2 次確率優越の間に成り立つ関係と同様の関係が RES と w を参照点とする S 字型価値関数についても成り立つということを意味している．また, RES は次の Theorem 2 で示されるように整合的リスク尺度の一部の性質を満たす．

Theorem 2

<u>単調性</u>

$X \geq Y$ を満たす任意の確率変数に対して,

$$RES_{w,\beta_2,\beta_1}(X) \leq RES_{w,\beta_2,\beta_1}(Y),$$

が成り立つ．

<u>正の同次性</u>

$w = 0$ のとき, 任意の正の実数 λ に対して,

$$RES_{w,\beta_2,\beta_1}(\lambda X) = \lambda RES_{w,\beta_2,\beta_1}(X),$$

が成り立つ．

<u>平行移動不変性</u>

任意の実数 c に対して,

$$RES_{w,\beta_2,\beta_1}(X + c) = RES_{w,\beta_2,\beta_1}(X) - c,$$

が成り立つ．

5. おわりに

本研究では, 意思決定理論との整合性に焦点を当て, 記述的なリスク尺度として RES を提案した．RES はプロスペクト理論に整合的であり, 心理学で知られる主観性などのリスク認知の特徴と一致している．本研究ではさらに, RES のパラメータがある範囲に収まる場合はプロスペクト確率優越と同値であることを示し, RES が持つリスク尺度としての性質のいくつかを明らかにした．

参考文献

[1] Baucells M. and Heukamp F., 2006, Stochastic Dominance and Cumulative Prospect Theory, Management Science. 52(9). 1409-1423.

[2] Ogryczak, W. and A, Ruszczynski. 1999. “From Stochastic Dominance to Mean-risk Models: Semideviations as Risk Measures”. European Journal of Operational Research. 116(1). 33-50.

[3] 宮原孝夫. 2017. :“プロジェクトの総合的評価理論「リスク鋭感的価値尺度法」”, 日本リアルオプション学会.